Lineares Gleichungssystem (LGS)

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Lineare Gleichungssysteme und Lösbarkeit

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System, das aus mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten besteht. Linear bedeutet, dass in der Gleichung nur x, y, z oder andere Variablen vorkommen, aber beispielsweise nicht x^2, $\sqrt{x}$, e^x oder ähnliche.

Lösungsmenge

Es gibt folgende Möglichkeiten:

- Das LGS hat genau eine Lösung
- Das LGS hat keine Lösung
- Das LGS hat unendlich viele Lösungen

Damit ein LGS eindeutig lösbar ist, ist es wichtig, dass es genau so viele voneinander linear unabhängige Gleichungen gibt, wie es Unbekannte gibt. Zwei Gleichungen sind dabei **linear abhängig**, wenn man eine Gleichung so mit einer reellen Zahl multiplizieren kann, sodass dabei die zweite Gleichung entsteht.

Besitzt ein LGS weniger Gleichungen als Unbekannte, so kann es unendlich viele Lösungen oder keine Lösung besitzen.

Besitzt ein LGS mehr Gleichungen als Unbekannte heißt es **überbestimmtes Gleichungssystem** und ist oft nicht lösbar.

Beispiele

Überbestimmes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ \text{III} & 4x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{array}$$

Unterbestimmtes Gleichungssystem:
$x > x + y = 2$ besitzt unendlich viele Lösungen

Besitzt genau eine Lösung:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Lösungsmöglichkeiten

Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren addiert man die verschiedenen Gleichungen und eliminiert so nacheinander aus einer Gleichung alle Unbekannten bis auf eine. Diese Gleichung kann dann nach der verbliebenen Variable aufgelöst werden. Diese Lösung wird wiederum in die übrigen Gleichungen eingesetzt. Dies geschieht dann so lang bis für alle Unbekannten eine Lösung vorliegt.

Beispiel

Das folgende LGS soll mit Hilfe des Additionsverfahrens gelöst werden:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Wir wollen nun in der ersten Gleichung x_2 eliminieren. Wir müssen also durch $\text{I} + z \cdot \text{II}$ erreichen, dass $-2x_2 + z \cdot (-x_2) = 0$ ist. Lösen wir diese Gleichung, erhalten wir $z = -2$. Also rechnen wir $\text{I}a = \text{I} + (-2) \cdot \text{II}$.

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -2 \cdot \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ \hline \text{I}a & -3x_1 & + & 0x_2 & = & -3 \end{array}$$

Nun können wir $\text{I}a$ nach x_1 auflösen und erhalten so: $x_1 = 1$. Setzen wir dies in II ein, so erhalten wir wieder eine

Gleichung mit nur einer Unbekannten und können so die Lösung für x_2 bestimmen:

$$2x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren geht man wie folgt vor:

1. Stelle die erste Gleichung nach x_1 um und setze dies in die übrigen Gleichungen ein
2. Stelle die so entstandene zweite Gleichung nach x_2 um und setze in die folgenden Gleichungen ein
3. Führe dies so weit fort, bis du eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhältst, die du dann lösen kannst
4. Setze nun nacheinander die erhaltenen Lösungen in die jeweils letzte Gleichung ein

Beispiel

Wir lösen das LGS aus dem vorherigen Beispiel mit Hilfe des Einstzungsverfahrens: Dazu lösen wir die erste Gleichung nach x_1 auf und setzen in die zweite ein:

$$\begin{array}{cccccccc} & \text{I} & x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ \Leftrightarrow & \text{I}a & x_1 & = & -1 & + & 2x_2 \end{array}$$

Setzen wir dies in II ein, so erhalten wir eine Gleichung, die wir nach x_2 lösen können:

$$2x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1 + 2x_2) - x_2 = 1 \Leftrightarrow -2 + 3x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

Diese Lösung setzen wir in Ia ein und erhalten: $x_1 = -1 + 2x_2 = -1 + 2 = 1$

Lösung für überbestimmte Gleichungssysteme

Bei überbestimmten Gleichungssystemen ist es sinnvoll zunächst so viele linear unabhängige Gleichungen wie Unbekannte zu betrachten und die übrigen Gleichungen zunächst zu ignorieren. Findest du so eine Lösung, setzt du sie anschließend in die übrigen Gleichungen ein und überprüfst so. Sind diese Gleichungen mit den berechneten Gleichungen ebenfalls erfüllt, so hast du eine Lösung gefunden. Ist dies nicht der Fall, so ist das LGS nicht lösbar.

Lösung für unterbestimmte Gleichungssysteme

Hier ist es sinnvoll nur so viele Unbekannte zu betrachten, wie Gleichungen vorliegen. Die übrigen sieht man dann als Parameter an und stellt die Lösungen der anderen in Abhängigkeit dieser Parameter dar.